# Conjuntos numéricos

## Introducción

Al comenzar un curso de Cálculo surge la polémica: ¿Cómo empezar? ¿Cómo se dan los números reales? Creemos que la mejor forma de resolver este problema es dar por supuesto su existencia, ya que los alumnos los han manejado con anterioridad.

Por ello, analizaremos los números reales desde un punto de vista axiomático, enunciando sus propiedades (aritméticas, de ordenación y existencia de extremo superior).

Iniciaremos el capítulo viendo una propiedad importante de un subconjunto de los números reales: el principio de inducción en el conjunto $I\!N$ de los números naturales que se utilizará posteriormente, sobre todo para demostrar propiedades relativas a sucesiones. A continuación, enunciaremos las propiedades de los números reales que constituyen su definición axiomática ($I\!R$ es el único cuerpo ordenado que verifica el axioma del supremo). Conviene señalar que, aunque se enuncia al principio la propiedad arquimediana, ésta se puede deducir fácilmente a partir de los axiomas de cuerpo ordenado y del supremo. Después de ver las propiedades del valor absoluto y los distintos tipos de intervalos, se enuncia el principio de los intervalos encajados. El capítulo finaliza con una breve introducción al estudio del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

## 1. El principio de inducción en el conjunto $I\!N$

### 1.1. Principio de inducción

Se considera el conjunto $I\!N$ de los números naturales $I\!N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Sea $P$ una propiedad que puede verificar o no un número natural. Expresamos que $P(n)$ es cierto si el número natural $n$ verifica la propiedad $P$. Si se tiene

i) $P(1)$ es cierto, es decir, el primer número natural verifica $P$;

ii) si es cierto $P(n)$ entonces también lo es $P(n+1)$,

entonces todo número natural verifica la propiedad $P$.

OBSERVACIONES:

1) *El principio de inducción es cierto debido a que $I\!N$ es un conjunto "bien ordenado" (todo subconjunto suyo distinto del conjunto vacío tiene primer elemento).*

2) *Si la hipótesis i) se cambia por "$P(n_0)$ es cierto", se puede concluir que todo número natural $n > n_0$ verifica $P$.*

# 2. Axiomática de los números reales

## 2.1. Introducción

Se considera que el lector ya ha manejado anteriomente los números reales y que conoce que éstos admiten una expresión decimal de la forma

$$\alpha_0{}'a_1a_2\ldots a_n\ldots,\quad \alpha_0\in\mathbb{Z}\quad \text{y}\quad 0\leq a_i\leq 9\quad \forall i\in\mathbb{N}.$$

Si las cifras $a_i$ a partir de una dada se repiten de forma periódica, el número es racional e irracional en caso contrario. Suponemos que también es conocido que todo número racional se puede expresar de forma

$$\frac{p}{q}\quad p,q\in\mathbb{Z}\quad \text{y}\quad \frac{p}{q}\quad \text{fracción irreducible}$$

y la forma de hacer corresponder las expresiones decimales y en forma de fracción de un número racional (véase el problema 3).

Enunciaremos, por tanto, sólo la axiomática de los números reales a través de sus propiedades aritméticas, de ordenación, arquimediana y densidad de los racionales.

## 2.2. Propiedades aritméticas de $\mathbb{R}$

El conjunto $\mathbb{R}$, con las operaciones suma y producto usuales es un cuerpo conmutativo, es decir

i) $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a+b\in\mathbb{R};\quad a\cdot b\in\mathbb{R}.$
ii) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad (a+b)+c=a+(b+c);\quad (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c).$
iii) $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a+b=b+a;\quad a\cdot b=b\cdot a.$
iv) $\forall a\in\mathbb{R}\quad a+0=a;\quad a\cdot 1=a.$
v) $\forall a\in\mathbb{R},\quad \exists(-a)$ tal que $a+(-a)=0$ ($-a$ es el opuesto de $a$).
vi) $\forall a\in\mathbb{R},\quad a\neq 0\quad \exists a^{-1}=\dfrac{1}{a}$ tal que $a\cdot a^{-1}=1$ ($a^{-1}$ es el inverso de $a$).
vii) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

## 2.3. Propiedades de ordenación de $\mathbb{R}$

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un cuerpo totalmente ordenado, es decir, la relación de orden usual verifica

i) Si $a\leq b$ y $b\leq a\implies a=b.$
ii) $\forall a,b\in\mathbb{R}\quad a<b$ ó $b<a$ ó $a=b.$
iii) Si $a\leq b$ y $b\leq c\implies a\leq c.$
iv) $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ y $a\leq b\implies a+c\leq b+c.$
v) Si $0\leq a$ y $0\leq b\implies 0\leq a\cdot b.$

# 3. El valor absoluto

### 3.1. Definición. Valor absoluto de un número real

Dado un número real $x$ el valor absoluto de $x$, denotado $|x|$ se define por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN: *Cuando sea preciso manejar el valor absoluto de una expresión, conviene analizar por separado los casos en que la citada expresión tenga signo positivo y negativo.*

### 3.2. Propiedades del valor absoluto

Sean $x$ e $y$ números reales cualesquiera, $x, y \in \mathbb{R}$. Se verifica

i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Además $|x| = 0 \iff x = 0$.

ii) $-|x| \leq x \leq |x|$.

iii) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$.

iv) $|x + y| \leq |x| + |y|$; $\quad |x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$.

v) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $\quad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$.

### 3.3. Definición. Conjuntos acotados

a) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que está acotado superiormente si

$$\exists M \;/\; \forall x \in A \quad x \leq M.$$

b) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente si

$$\exists m \;/\; \forall x \in A \quad m \leq x.$$

c) Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ está acotado si

$$\exists M \;/\; \forall x \in A \quad |x| \leq M.$$

OBSERVACIÓN: *Un conjunto está acotado si y sólo si lo está superior e inferiormente.*

### 3.4. Axioma del supremo (ínfimo)

a) Sea $A$ un conjunto de números reales acotado superiormente. Entonces $A$ tiene extremo superior o supremo $x_0$, denotado por $\sup A$, que verifica

i) $x_0 \geq x$ para todo $x \in A$.

ii) Si $y \geq x$ para todo $x \in A$ entonces $y \geq x_0$.

b) Sea $A$ un conjunto de números reales acotado inferiormente. Entonces $A$ tiene extremo inferior o ínfimo $y_0$, denotado por $\inf A$, que verifica

i) $y_0 \leq x$ para todo $x \in A$.

# 4. Intervalos

### 4.1. Definición. Intervalo

Un subconjunto $I$ de números reales es un intervalo si dados $x, y \in I$ con $x < y$; para todo $z$ que verifica $x < z < y$ se tiene que $z \in I$.

### 4.2. Definición. Intervalos acotados

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\} \quad \text{intervalo abierto}$$
$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\} \quad \text{intervalo cerrado}$$
$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$$
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$$

Los intervalos $(a,b]$ y $[a,b)$ son intervalos semiabiertos o semicerrados.

### 4.3. Definición. Intervalos no acotados o semirrectas

Sea $a \in \mathbb{R}$ entonces

$$(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$$
$$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$$
$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$$
$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$$

NOTA: *El conjunto $\mathbb{R}$ se puede expresar como el intervalo $(-\infty,\infty)$.*

## PROBLEMAS RESUELTOS

1. *Demostrar aplicando el principio de inducción las relaciones siguientes*

*a)* $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

*b)* $2^n \leq n! \quad$ *si* $n \geq 4$.

*c)* $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} = n2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

que es la fórmula para $n+1$.
Haciendo uso de la validez de la fórmula para $n$ podemos expresar

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=(n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

igualdad que demuestra la fórmula para $n+1$.

b) Para $n=4$ se cumple, ya que

$$2^4=16\leq 4!=24.$$

Supuesta cierta la relación para $n\geq 4$, es decir, $2^n\leq n!$, debemos probar que se verifica $2^{n+1}\leq(n+1)!$. Pero,

$$2^{n+1}=2\cdot 2^n\leq 2n!\leq(n+1)n!=(n+1)!$$

con lo que queda demostrada la relación.
(La primera desigualdad es consecuencia de la validez de la relación $2^n\leq n!$ supuesta por la hipótesis de inducción).

OBSERVACIÓN: *Hemos demostrado $2^n\leq n!$ para $n\geq 4$, ya que el primer número natural que verifica la relación es $n_0=4$.*

c) Para $n=1$ la igualdad es cierta puesto que los dos miembros de la fórmula valen 1.
Supuesta cierta la igualdad para $n$, para $n+1$ se debe comprobar

$$\binom{n+1}{1}+2\binom{n+1}{2}+3\binom{n+1}{3}+\cdots+n\binom{n+1}{n}+(n+1)\binom{n+1}{n+1}=(n+1)2^n$$

Aplicando las propiedades de los números combinatorios a la expresión anterior se obtiene

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]+2\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]+$$
$$+3\left[\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right]+\cdots+n\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]+(n+1).$$

Teniendo en cuenta que $n+1=n\binom{n}{n}+\binom{n}{n}$ y agrupando apropiadamente los términos se llega a

$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]+$$
$$+2\left[\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+(n-1)\binom{n}{n-1}+n\binom{n}{n}\right].$$

Al ser el primer sumando $(1+1)^n$ y aplicando la hipótesis de inducción al segundo sumando obtenemos

8. *Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo si existen de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ siguientes:*

*a)* $A = (1,3)$ *b)* $B = \mathbb{N}$

*c)* $C = \{2,\ 2'2,\ 2'22,\ 2'222, \ldots\}$ *d)* $D = \{x \,/\, x = (-1)^n + \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}\}$

*e)* $E = \{x \,/\, x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$

SOLUCIÓN:

a) El supremo de $A$ es 3, que no es máximo pues $3 \notin A$. El ínfimo de $A$ es 1, que no es mínimo.

b) $B$ no tiene extremo superior ($B$ no está acotado). El extremo inferior de $B$ es 1, que es el mínimo del conjunto.

c) El extremo inferior, que es mínimo de $C$, es 2. El extremo superior de $C$ es $2'\hat{2} = \frac{20}{9}$, que no es máximo.

d) Los elementos del conjunto $D$ son

$$D = \left\{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots\right\}$$

(observemos que si $n$ es par, $(-1)^n = 1$ y si $n$ es impar $(-1)^n = -1$ ).

El extremo superior que es máximo es $\frac{3}{2}$.

El extremo inferior, que no es mínimo, es $-1$ (los números con $n$ impar se "aproximan" a él si $n$ es grande).

e) La representación gráfica de la curva

$$y = x^2 + 5x - 6 = (x+6)(x-1),$$

es la parábola de la figura 1.5

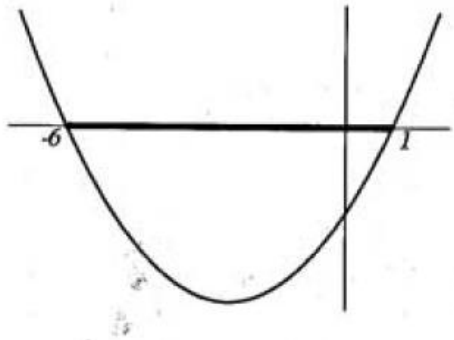


Fig. 1.5

y por tanto $y \leq 0$ si y sólo si $x \in [-6, 1]$. Es decir $E = [-6, 1]$. En consecuencia, el

10. *Se considera un circuito eléctrico formado por dos resistencias en paralelo $R_1$ y $R_2$. La resistencia total $R$ en ohmios del circuito viene dada por la fórmula*
$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$
*Las resistencias $R_1$ y $R_2$ son unos reostatos (resistencias variables) tales que $R_1$ puede variar entre 3 y 10 ohmios y $R_2$ de 15 a 25 ohmios. Hallar la gama de valores entre los cuales está la resistencia $R$.*

SOLUCIÓN:

Como $3 \leq R_1 \leq 10$ y $15 \leq R_2 \leq 25$ se tiene
$$\frac{1}{10} \leq \frac{1}{R_1} \leq \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{25} \leq \frac{1}{R_2} \leq \frac{1}{15}$$
Entonces
$$\frac{1}{10}+\frac{1}{25} \leq \frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$
Por tanto,
$$\frac{14}{100} \leq \frac{1}{R} \leq \frac{6}{15}.$$
En consecuencia, $R$ estará entre $\frac{15}{6}$ y $\frac{100}{14}$ ohmios.

12. *Hallar los números reales $x \in I\!R$ que verifican*

*a)* $\dfrac{(x+3)(x-4)}{x^3-2x^2-3x}<0$ *b)* $|3x-1|>|2x-4|$

*c)* $(x-2)^2 \geq 1$ *d)* $\big||x-1|-|x+1|\big| \leq 1$

SOLUCIÓN:

a) Al ser
$$x^3-2x^2-3x=x(x+1)(x-3)$$
la expresión del enunciado es equivalente a
$$\frac{(x+3)(x-4)}{(x+1)x(x-3)}<0$$
y no tiene sentido si el valor de $x$ es $-1$, 0 ó 3, puesto que el denominador valdría 0. Obviamente, si $x=-3$ ó $x=4$ la parte izquierda de la expresión vale 0 y la desigualdad no se verifica.
Para el resto de los valores de $x$ se distinguen los siguientes casos

Siguiendo el mismo razonamiento se obtiene que en el caso iii) la expresión es negativa, positiva en el iv), con valor negativo en el v) y, finalmente, positivo en el caso vi).
Por tanto,

$$\left\{ x \;\middle/\; \frac{(x+3)(x-4)}{x^3-2x^2-3x} < 0 \right\} = (-\infty,-3) \cup (-1,0) \cup (3,4).$$

b) Observemos que en los puntos $x = \dfrac{1}{3}$ y $x = 2$ se verifica, respectivamente $3x - 1 = 0$ y $2x - 4 = 0$.
Ahora, si $x \leq \dfrac{1}{3}$ se tiene $|3x-1| = 1-3x$ y $|2x-4| = 4-2x$. Por tanto, la desigualdad se reduce a $1 - 3x > 4 - 2x$, o lo que es equivalente, $-3 > x$ es decir, se verifica en $(-\infty, -3)$.
Si $\dfrac{1}{3} < x \leq 2$, entonces $|3x-1| = 3x-1$ y $|2x-4| = 4-2x$ y ahora se debe resolver $3x - 1 > 4 - 2x$, que es equivalente a $x > 1$.
Por tanto, la desigualdad se verifica en $(1, 2]$.
Obsérvese que en este caso se está trabajando en el intervalo $\left(\dfrac{1}{3}, 2\right]$.
Si $2 < x$ se obtiene $|3x-1| = 3x - 1$ y $|2x-4| = 2x - 4$ y debemos resolver $3x - 1 > 2x - 4$ que es equivalente a $x > -3$.
Por tanto, todo punto del intervalo $(2, \infty)$ satisface la desigualdad.
En resumen

$$\{x \,/\, |3x-1| > |2x-4|\} = (-\infty,-3) \cup (1,\infty).$$

c) La desigualdad $(x-2)^2 \geq 1$ se verifica si $|x-2| \geq 1$; por tanto, se cumple

$$(x-2) \geq 1 \quad \text{ó} \quad (x-2) \leq -1$$

Entonces

$$\begin{array}{lll} (x-2) \geq 1 & \text{si} & x \geq 3 \\ (x-2) \leq -1 & \text{si} & x \leq 1 \end{array}$$

Por tanto,

$$\left\{x \,/\, (x-2)^2 \geq 1\right\} = (-\infty, 1] \cup [3, \infty).$$

d) En principio, para poder eliminar valores absolutos en $|x-1|$ y $|x+1|$, se distinguirán los conjuntos

i) $(-\infty, -1]$ ii)$[-1, 1)$ iii) $[1, \infty)$

En el caso i), si $x \leq -1$ se tiene que $|x-1| = 1 - x$ y $|x+1| = -1 - x$
Por tanto, se verifica

$$\big|\, |x-1| - |x+1| \,\big| \leq 1 \iff |1 - x - (-1-x)| = |2| = 2 \leq 1$$

y en consecuencia no se cumple la desigualdad.

Si $-1 < x < 1$ (caso ii) se verifica $|x-1| = 1 - x$ y $|x+1| = x + 1$ y por tanto

que se cumple si $x \geq -\frac{1}{2}$. En consecuencia, la desigualdad se verifica en $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$
Si $x \geq 0$

$$|-2x| \leq 1 \iff 2x \leq 1$$

que se cumple si $x \leq \frac{1}{2}$. En consecuencia, verifica la desigualdad el conjunto $\left[0, \frac{1}{2}\right]$
En el caso iii), si $x > 1$ entonces

$$|x-1| = x-1 \qquad |x+1| = x+1$$

La desigualdad se convierte en

$$|(x-1)-(x+1)| = |-2| = 2 \leq 1$$

que no se verifica nunca.
Por tanto,

$$\{x \,/\, \big| |x-1| - |x+1| \big| \leq 1\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

NOTA: *La desigualdad se puede interpretar geométricamente de la siguiente forma:* $|x-1|$ *es la distancia de* $x$ *a* 1*;* $|x+1|$ *es la distancia a* $-1$*. Evaluamos dichas distancias y restamos la mayor de la menor. Si la diferencia es menor o igual que 1, se satisface la desigualdad.*

## PROBLEMAS PROPUESTOS

1. *Demostrar, aplicando el principio de inducción, las siguientes relaciones:*

   *a)* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   *b)* $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ *es múltiplo de* 17, $\forall n \in \mathbb{N}$.

   *c)* $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

8. *Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si existen, de los subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *siguientes*

   *a)* $A = [1,4]$     *b)* $B = [1,4] \cap \mathbb{Q}$
   *c)* $C = \{1, 2, 3, \pi\}$     *d)* $D = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 4x - 5 < 0\}$
   *e)* $E = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$.

11. *Hallar los números reales* $x$ *que verifican*

   *a)* $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} < 0$     *b)* $(x-3)^2 \leq 1$
   *c)* $|x-1|\,|x+2| > 3$     *d)* $\left|x+2\right| \ldots ||2x-1| - |5-2x|| > 1$